проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg

Въводно упражнение

ТЕМА: *ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ ЗА КОМПЛЕКСНИТЕ ЧИСЛА. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ЕКВИВАЛЕНТНА ЗАМЕСТВАЩА СХЕМА НА ЕЕС СПРЯМО МЯСТОТО НА КЪСОТО СЪЕДИНЕНИЕ*

От курса по моделиране в ЕЕС е известно, че математичното описание на режима на електрическата част на системата е представимо със заместващи схеми за права, обратна и нулева последователност. След привеждането на заместващите схеми към едно от нивата на напрежение се получава така наречените еквивалентни заместващи схеми (е.з.с.), в които са налице само галванически връзки между съставните ѝ елементи.

Еквивалентните заместващи схеми за установените (стационарни) режими са линейни вериги, състоящи се в общия случай от комплекси съпротивления ($\dot{Z}$) и проводимости ($\dot{Y}$) и ефективните комплекси на движещите източници на напрежение ($\dot{E}$) и на ток ($\dot{I}$).

От курса по къси съединения в ЕЕС е известно, че при възникване на късо съединение (к.с.) в електрическите вериги на ЕЕС възниква апериодична (преходна) и периодични съставящи на тока. Периодичните съставящи са с номиналната (близки до номиналната) или кратни на номиналната честота. Периодичната съставяща с номиналната честота се нарича основен хармоник, а останалите – висши хармоници. В инженерните (опростените) методики обикновено се изчисляват само токовете на основния хармоник. При к.с. на голяма електрическа отдалеченост от генераторите (к.с. в разпределителните мрежи за средно и ниско напрежение) амплитудата на периодичния ток в късо съединената верига не се изменя в стадия на к.с. Ето защо, периодичната съставка на тока се изчислява от стационарния режим, който ще се установи в електрическите вериги при променените условия на к.с. Както беше отбелязано по-горе параметрите на стационарни режими са комплексни. При трифазно к.с., системата от трифазни токове е симетрична с право редуване на фазите. Ето защо, за изчисляване на периодичния ток при трифазно к.с.се използва е.з.с. на ЕЕС за правата последователност. Отразяването (моделирането) на трифазното к.с. в е.з.с. се извършва чрез съединяване на възела, в който е възникнало к.с. с нулевата шина. При метално к.с. , съединението е директно, а при к.с. през ел. дъга – чрез активното съпротивление на дъгата $R_Д$.

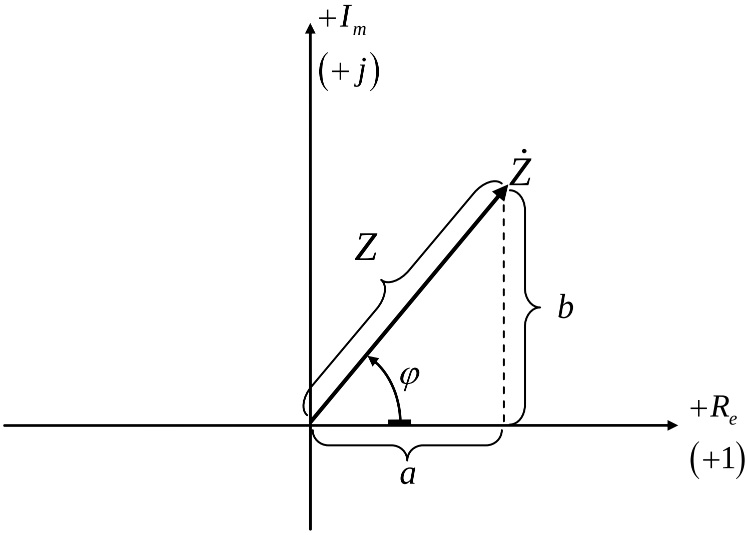
При електрически близки к.с. до генераторите, амплитудата на периодичния ток се изменя в стадия на к.с. Затова, в тези се използват е.з.с. за конкретен момент от стадия на к.с.

☐ В.1. <u>Основни понятия за комплексните числа.</u>

☐ В.1.1. Представяне на комплексните числа в алгебрична и експоненциална форма.

Комплексното число $\dot{Z}$ се дефинира математично чрез израза $\dot{Z} = a + jb$, където a е реалната част на комплексното число ; b – имагенерната част на комплексното число; $j = \sqrt{-1}$. Тази форма на записване на комплексното число се нарича **алгебрична**. Значението на комплексното число се изяснява чрез геометричното му изразяване в комплексната (Гаусовата) равнина (R_e, I_m), както е показано на фиг.В.1.1.

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg



Фиг.В.1.1. Представяне на комплексно число чрез правоъгълни (a,b) и полярни (Z,φ) координати

От фиг.В.1.1. е видно, че $\left| \begin{array}{l} a = Z\cdot\cos\varphi \\ b = Z\cdot\sin\varphi \end{array} \right.$

Тогава : $\dot{Z} = a + jb = Z\cdot\cos\varphi + jZ\cdot\sin\varphi = Z\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

По формулата на Ойлер :

$$Z\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi) = Z\cdot e^{j\varphi} ,$$

следователно $\dot{Z} = a + jb = Z\cdot e^{j\varphi}$.

Записването на комплексното число в полярни координати $Z\cdot e^{j\varphi}$ се нарича **експоненциална** форма, а Z се нарича модул и φ – аргумент (ъгъл).

За да се избегне писането на експоненциалната функция $e^{j\varphi}$, в литературата по енергетика е възприета следната опростена форма:

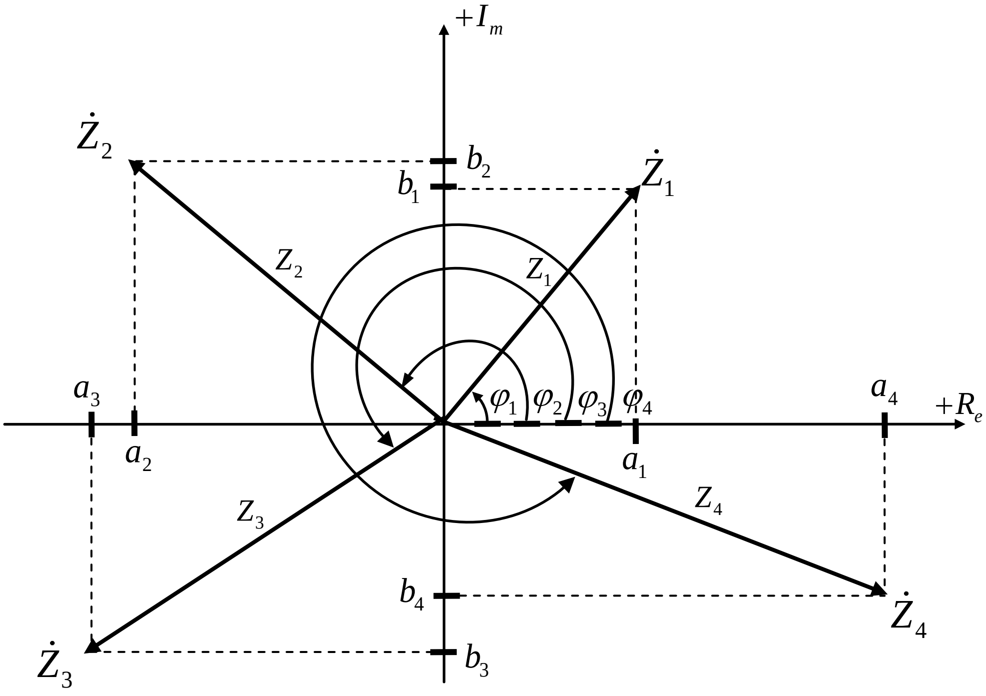
$$\dot{Z} = Z^{\underline{|\varphi}}, \text{ където } \underline{|\varphi} = e^{j\varphi}.$$

За превръщането на комплексното число от едната форма на записване към другата форма , се използват изразите (вж.фиг.В.1.1.)

$$\left| \begin{array}{l} Z = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = arctg\,\dfrac{b}{a} \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} a = Z\cdot\cos\varphi \\ b = Z\cdot\sin\varphi \end{array} \right. . \qquad \text{(B.1.1.)}$$

<u>Забележка</u>: При използване на (В.1.1.) трябва да се съобразява в кой квадрант е комплексното число (вж. фиг.В.1.2.). Затова е по-добре да се работи с изчислително средство, пригодено за работа с комплексни числа.

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg



Фиг.В.1.2. Измерване на ъгъла φ (аргумент) на комплексни числа
от четирите квадранта на комплексна равнина

☐ В.1.2. Действия с комплексни числа

При смятане с комплексни числа без специализирани средства трябва да се има в предвид следното:

Събирането и изваждането на комплексни числа е по-лесно, ако числата са в алгебрична форма на записване. Събират се (изваждат се) поотделно реалните и имагинерните им части.

Например, събиране на две комплексни числа $\dot{Z}_1$ и $\dot{Z}_2$ се извършва чрез израза:

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2),$$

а изваждането:

$$\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2).$$

Умножаването на комплексни числа се извършва най-удобно, когато числата са в експоненциална форма. Умножават се модулите и се събират ъглите, т.е. $\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 = \dot{Z}_1^{|\varphi_1} \cdot \dot{Z}_2^{|\varphi_2} = Z_1 \cdot Z_2^{|\varphi_1+\varphi_2}$.

Делението се извършва чрез разделяне на модулите и изваждане на ъглите, т.е. $\dfrac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \dfrac{\dot{Z}_1^{|\varphi_1}}{\dot{Z}_1^{|\varphi_2}} = \dfrac{Z_1}{Z_2}^{|\varphi_1-\varphi_2}$.

Умножението и делението при алгебрична форма на записване на числата се извършва чрез израза:

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg

$$\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 = (a_1 + jb_1)\cdot(a_2 + jb_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + j(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)\cdot(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)\cdot(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + j(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Задача 1: Да се извършат действия с комплексните числа, както следва:

а) $\dot{Z}_a = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 - \dot{Z}_4$, където $\dot{Z}_1 = 2 + j4$; $\dot{Z}_2 = j8$; $\dot{Z}_3 = 5^{|90^0}$; $\dot{Z}_4 = 3$

б) $\dot{Z}_б = \dot{Z}_5 * \dot{Z}_6$, където $\dot{Z}_5 = 8 - j3$; $\dot{Z}_6 = 4^{|120^0}$;

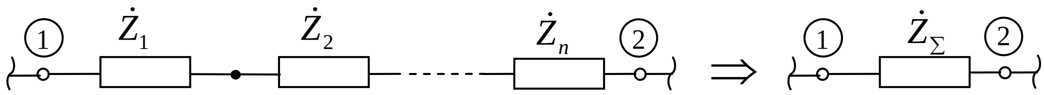
в) $\dot{Z}_в = \left(\dot{Z}_5 * \frac{\dot{Z}_6}{\dot{Z}_1}\right) * \left(\dot{Z}_2 * \dot{Z}_4\right)$.

Резултатите да се представят в алгебрична и комплексна форма на записване на комплексните числа.

Изходните числа и резултатите от действията с тях да се представят графично в комплексната равнина.

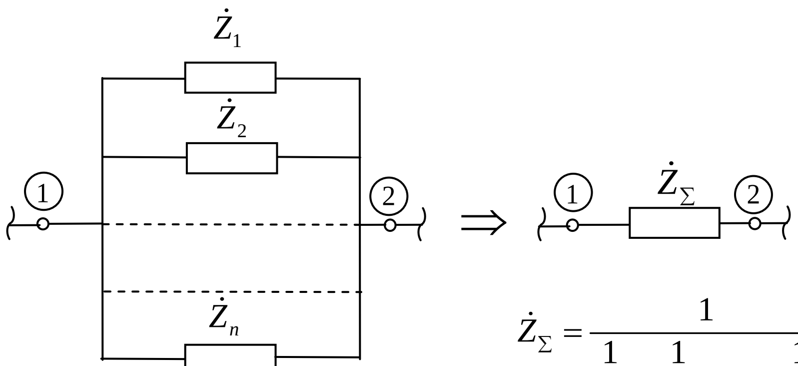
☐ В.2. Еквивалентно преобразуване (трансфигуриране) на линейни електрически вериги

Еквивалентното преобразуване на линейни електрически вериги се изучава подробно в курса по Теоретични основи на електротехниката. Тук ще припомним най-често използваните преобразувания. На фиг.В.3. са показани еквивалентните трансфигурации на пасивни части от линейна верига, както следва: а) последователни свързани съпротивления в едно съпротивление; б) паралелно свързани; в) три съпротивления, свързани в звезда се преобразуват в триъгълник; г) три съпротивления, свързани в триъгълник, се преобразува в звезда.



$$\dot{Z}_\Sigma = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \ldots + \dot{Z}_n$$

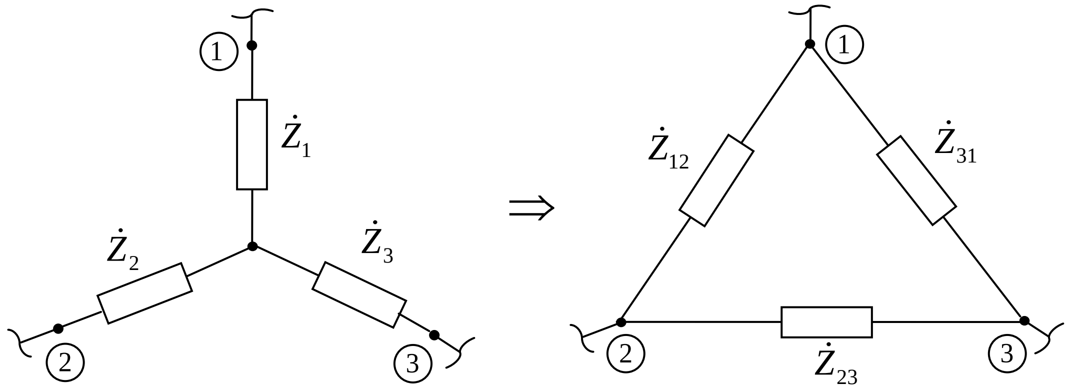
а)



$$\dot{Z}_\Sigma = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\dot{Z}_n}}$$

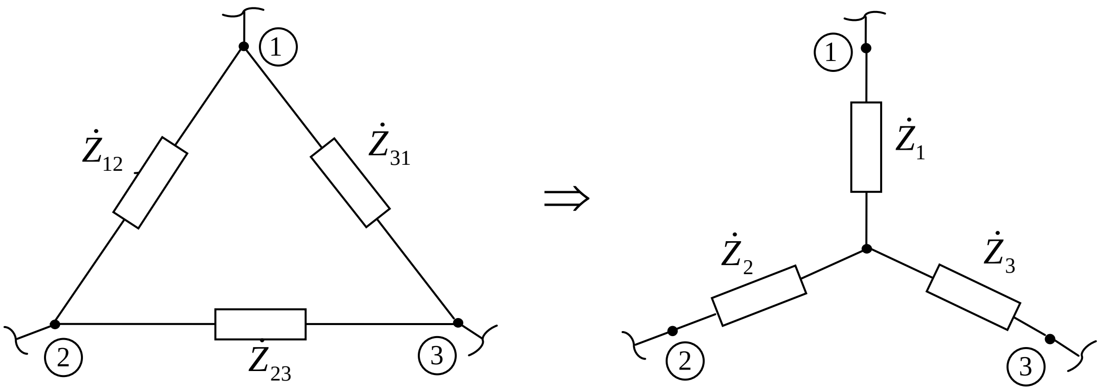
б)

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg



$$\begin{cases} \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dfrac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}; \\ \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dfrac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}; \\ \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 + \dfrac{\dot{Z}_3 \cdot \dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} \end{cases}$$

в)



$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \dfrac{\dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}; \\ \dot{Z}_2 = \dfrac{\dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}; \\ \dot{Z}_3 = \dfrac{\dot{Z}_{23} \cdot \dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}} \end{cases}$$

г)

Фиг.В.3.Еквивалентно преобразуване на пасивни части от линейна верига

Както се вижда от фиг.В.3.в преобразуването на звездата в триъгълник е по същество изключване на възел, в случая на възел 2. Изключването на възел може да бъде направено и при включени към него повече от три съпротивления,тогава се говори за многолъчева звезда. Ако звездата е n-

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg

.лъчева, изключването на възела води до получаване на пълен многоъгълник с n страни и m на брой диагонали. Броя на диагоналите се изчислява чрез израза:

$$m = C_n^2 - n \ ,$$

където C_n^2 е комбинацията от n елемента от втори клас.

Стойностите на съпротивленията на пълния многоъгълник, включени между които и да са възли k и p на многоъгълника се изчисляват чрез израза:

$$\dot{Z}_{kp} = \dot{Z}_{ik} \cdot \dot{Z}_{ip} \cdot \dot{y}_i \,,$$

където $\dot{Z}_{ik}$ и $\dot{Z}_{ip}$ са съпротивленията, включени между изключвания възел i и съответно възел k и възел p; $\dot{y}_i$ - възлова проводимост на изключвания възел i, равна на сумата от проводимостите на клоновете, свързани към изключвания възел.

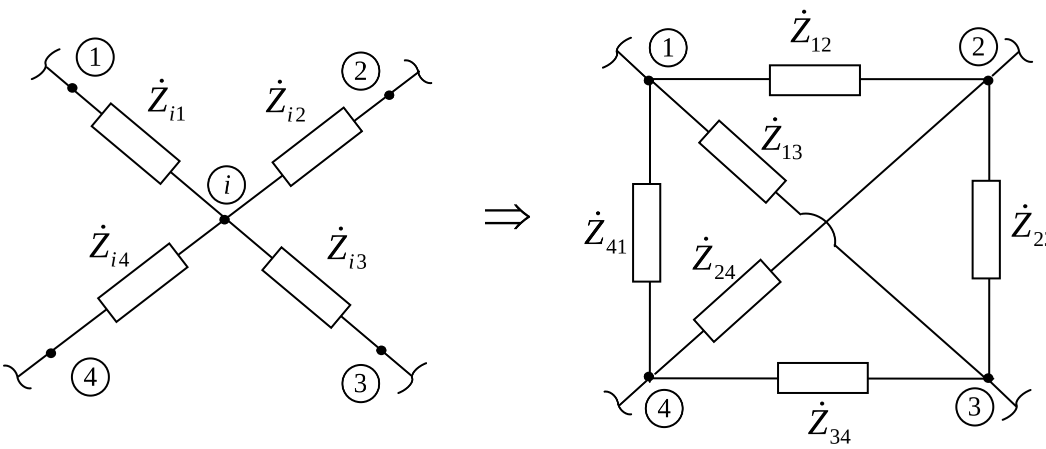
Например, за преобразуването на четирилъчевата звезда от фиг.В.4. в четириъгълник за диагоналите му са валидни следните изрази:

$$\dot{y}_i = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3} + \frac{1}{\dot{Z}_4} \ ;$$

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{i1} \cdot \dot{Z}_{i2} \cdot \dot{y}_i \ ; \quad \dot{Z}_{13} = \dot{Z}_{i1} \cdot \dot{Z}_{i3} \cdot \dot{y}_i \,;$$

$$\dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{i2} \cdot \dot{Z}_{i3} \cdot \dot{y}_i \ ; \quad \dot{Z}_{24} = \dot{Z}_{i2} \cdot \dot{Z}_{i4} \cdot \dot{y}_i \,;$$

$$\dot{Z}_{34} = \dot{Z}_{i3} \cdot \dot{Z}_{i4} \cdot \dot{y}_i \ ; \quad \dot{Z}_{41} = \dot{Z}_{i4} \cdot \dot{Z}_{i1} \cdot \dot{y}_i$$

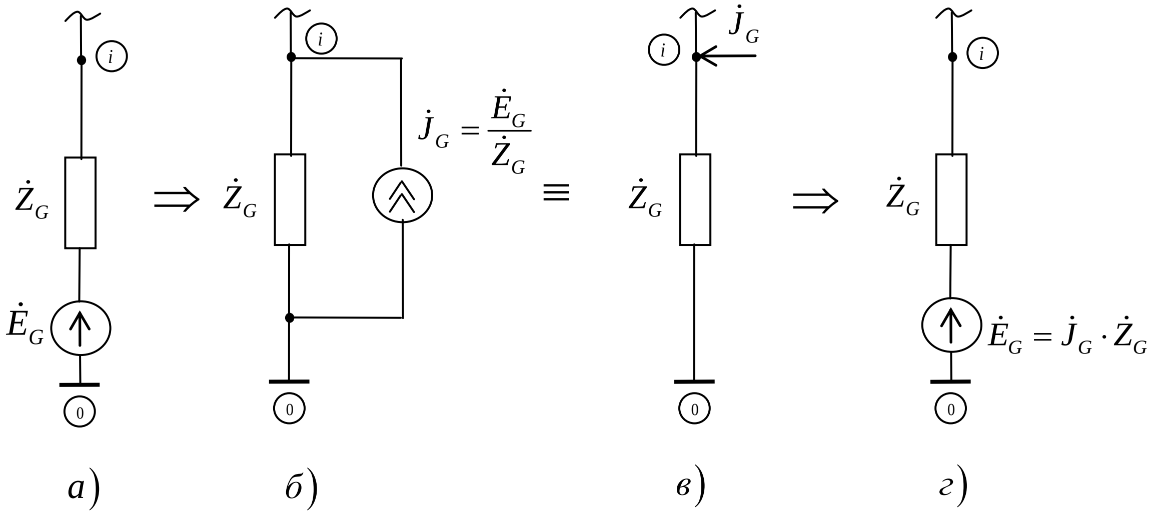


Фиг.В.4.Изключване на възел от пасивната част на линейна верига.
(Преобразуване на четирилъчева звезда в четириъгълник с диагоналите му.)

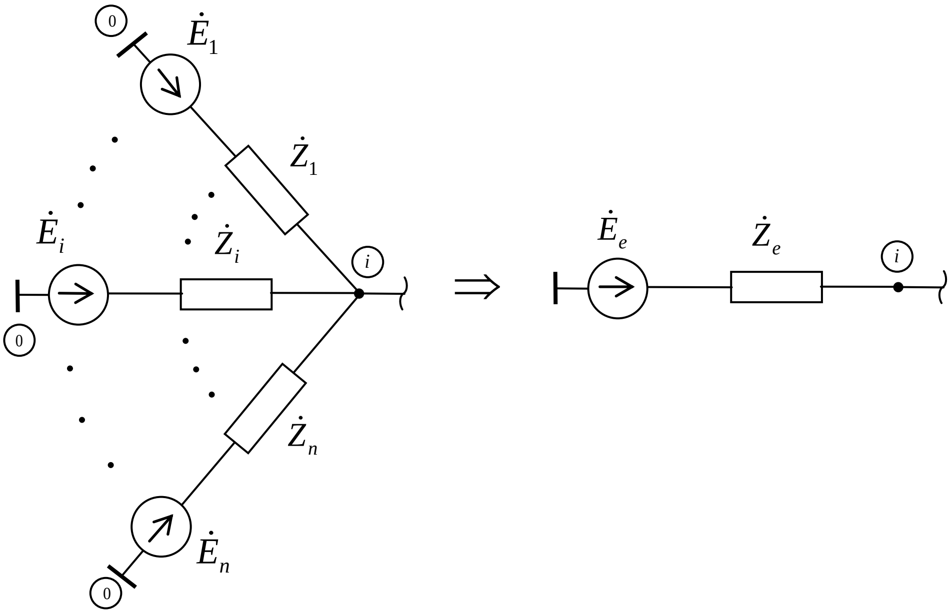
Еквивалентни преобразувания се извършват и на активните части на линейните вериги.

На фиг.В.5. са представени преобразуването на реален източник на напрежение, включен във възел i, в източник на ток и обратно. Ще отбележим, че в инженерната практика е възприето графичния условен знак за източник на ток да е само стрелка (фиг.В.5б е еквивалентна на фиг.В.5в).

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg



Фиг.В.5. Преобразуване на реален източник на напрежение с е.д.н. $\dot{E}_G$
и вътрешно съпротивление $\dot{Z}_G$ в източник на ток и обратно.



Фиг.В.6. Заместване на n на брой реални източници на напрежения,
включени в паралел към възел i с един еквивалентен източник към същия възел.

Както е известно, в заместващите схеми генераторите се представят с реални източници на напрежение[1]. В централите има по няколко генератора, които са включени (по групи или всичките) в паралел към общ възел на системата (уредбата за генераторно напрежение или уредбата за високо напрежение). Идеята е всички генератори, включени към даден възел да се представят с един еквивалентен източник на напрежение. На фиг.В.6. е показан възел i от е.з.с., към който са включени в паралел n на брой реални източници на напрежение и еквивалентното им представяне с един източник. Параметрите на еквивалентния източник се изчисляват чрез изразите:

[1] Виж раздел 5 от „Моделиране в ЕЕС – Записки на лекции.“.

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg

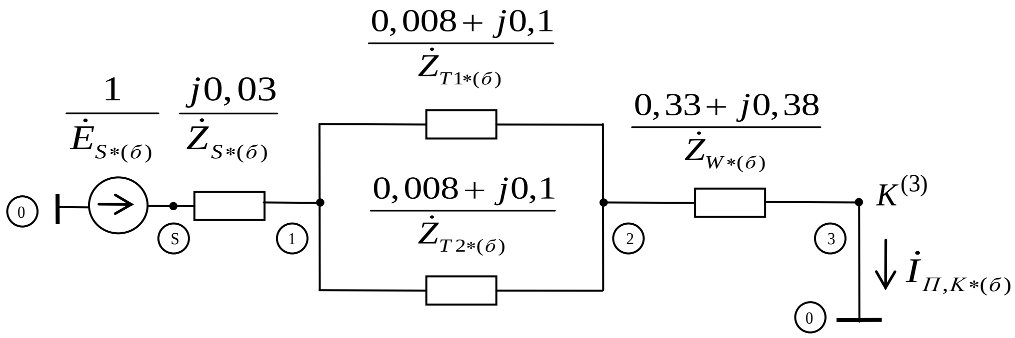
$$\dot{Z}_e = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\dot{Z}_n}} \ ;$$

$$c_1 = \frac{\dot{Z}_e}{\dot{Z}_1};\ c_2 = \frac{\dot{Z}_e}{\dot{Z}_2};\ \ldots\ldots\ c_n = \frac{\dot{Z}_e}{\dot{Z}_n}\ ;$$

$$\dot{E}_e = c_1.E_1 + c_2.E_2 + \ldots + c_n.E_n\ .$$

За коефициентите на разпределение c_i е валидно съотношението: $c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_n = 1$, което може да служи за проверка на правилността и точността на проведените изчисления.

Задача 2.2: На фиг.В.7 е показана еквивалентна заместваща схема, във възел 3 на която е моделирано метално трифазно к.с. Чрез еквивалентни преобразувания да се изключат от схемата възли 1 и 2 и да се изчисли тока в мястото на к.с. $\dot{I}_{П,K*(б)}$:

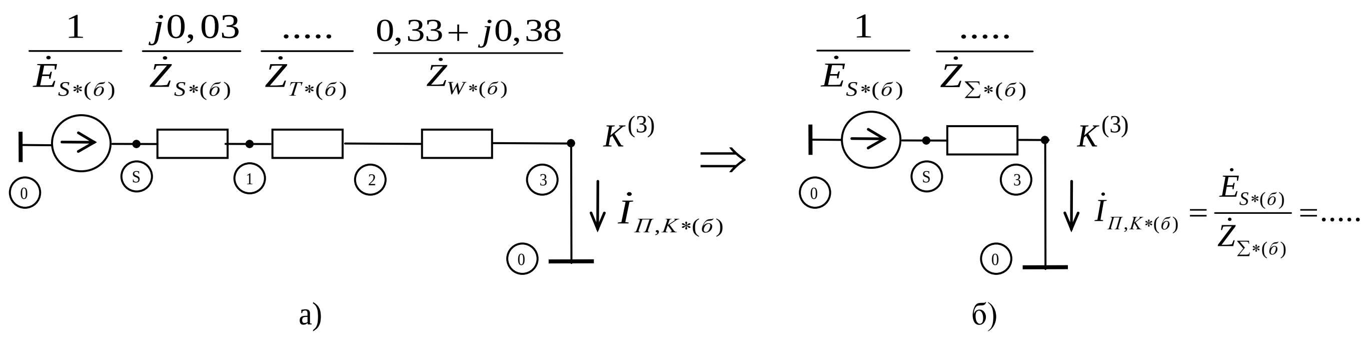


Фиг.В.7.

Методични указания.

Изключването на възли 1 и 2 от схемата ще я преобразува до схема с един реален източник, включен във възела с к.с. (вж. фиг.В.8б). До такава проста схема се преобразува е.з.с. на ЕЕС, **когато се търси само тока в мястото на к.с.**

Реда на изключването на възлите е показан на фиг.В.8. Паралелно включените към възли 1 и 2 съпротивления $\dot{Z}_{T1*(б)}$ и $\dot{Z}_{T2*(б)}$ се заместват с едно съпротивление $\dot{Z}_{T*(б)}$ (фиг.В.8а). След това последователно включените съпротивления между възли S и 3 се заместват с едно съпротивление $\dot{Z}_{\Sigma*(б)}$ (фиг.В.8б). Търсения ток се определя по закона на Ом.



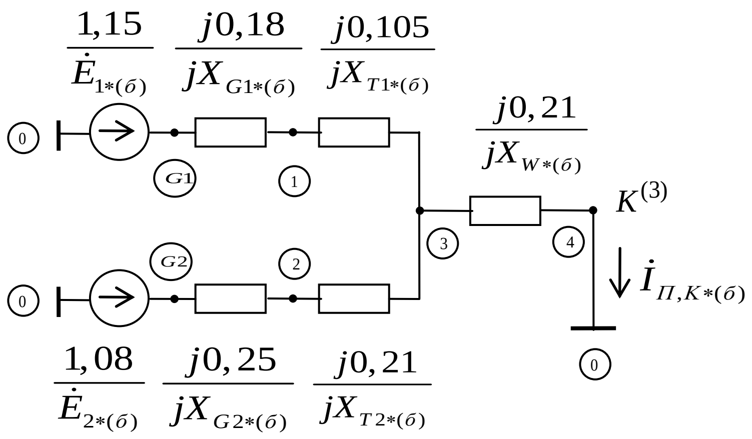
Фиг.В.8.

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg

Задача 2.2: На фиг.В.9 е показана еквивалентна схема, във възел 4 на която е моделирано метално трифазно к.с. Еквивалентно да се преобразува схемата до:

1) схема с един източник на напрежение, включен във възела с к.с. и да се изчисли тока в мястото на к.с. $\dot{I}_{П,K*(б)}$;

2) схема с изключени възли 1, 2 и 3 и да се изчислят токовете, които източниците на напрежение E_1 и E_2 прокарват в мястото на к.с.



Фиг.В.9

Методични указания.

От фиг.В.9 се вижда, че всички елементи в схемата са заместени само с индуктивните им съпротивления[2]. В този случай при изчисляване на елементите в процеса на преобразуване на схемата „j“ може да се изпуска и чисто имагинерните числа да се третират като реални. В окончателната схема се отразява, че съпротивлението е имагинерно (вж. фиг.В.10).

Редът за преобразуването на схемата по изискването на подусловие 1) е показан на фиг.В.10., а за подусловие 2) – на фиг.В.11.

Възлите 1 и 2 се изключват чрез представяне на последователно включените съпротивления с по едно съпротивление (фиг.В.10б-в). Паралелно включените два източника във възел 3 на фиг.В.10а) се представят с един еквивалентен генератор, представен на фиг.В.10б). Изключването на възел 3 от фиг.В.11а) може да се извърши чрез преобразуване на звездата, образувана от съпротивленията $X_{G1,3*(б)}, X_{G2,3*(б)}$ и $X_{W*(б)}$ в триъгълник или като се използват общите формули за изключване на възел. Токовете, които прокарват източниците $\dot{E}_{1*(б)}$ и $\dot{E}_{2*(б)}$ в мястото на к.с. могат да се определят също закона на Ом. От фиг.В11б) е видно, че

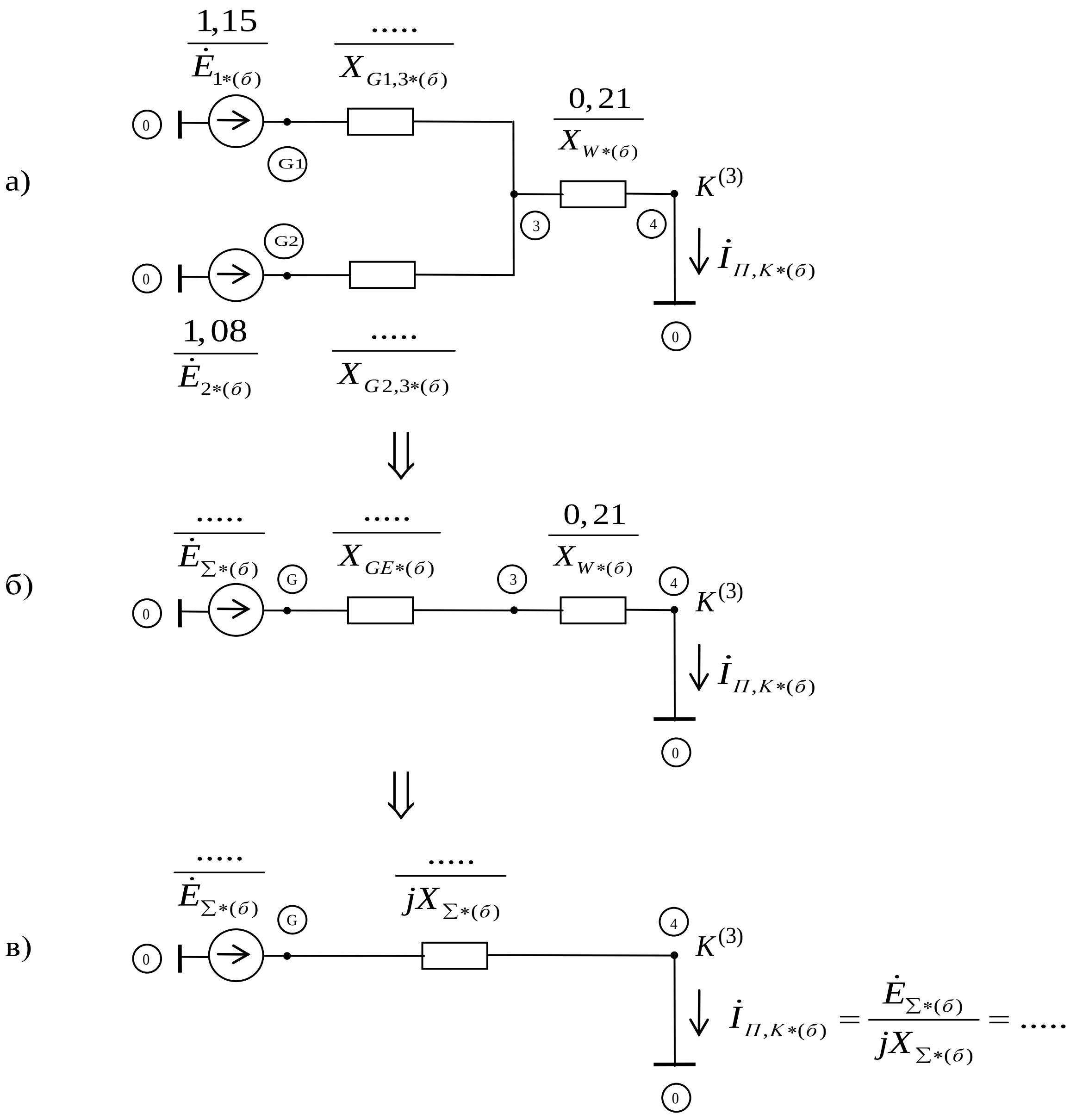
$$\dot{I}_{E1,K*(б)} = \frac{\dot{E}_{1*(б)}}{jX_{G1,K*(б)}}; \quad \dot{I}_{E2,K*(б)} = \frac{\dot{E}_{2*(б)}}{jX_{G2,K*(б)}}$$

и че съпротивлението $jX_{G1,G2*(б)}$, включено между възлите на идеалните източници на е.д.н., не влияе върху стойността на тока в мястото на к.с. $\dot{I}_{П,K*(б)}$. Ето защо при изчисляване на $\dot{I}_{П,K*(б)}$ не е необходимо да се изчисляват съпротивленията в преобразуваната схема, включени между възлите на иде-

[2] Пропускане на активното съпротивление само при изчисляване на ефективната стойност на периодичния ток (вж. лекциите)

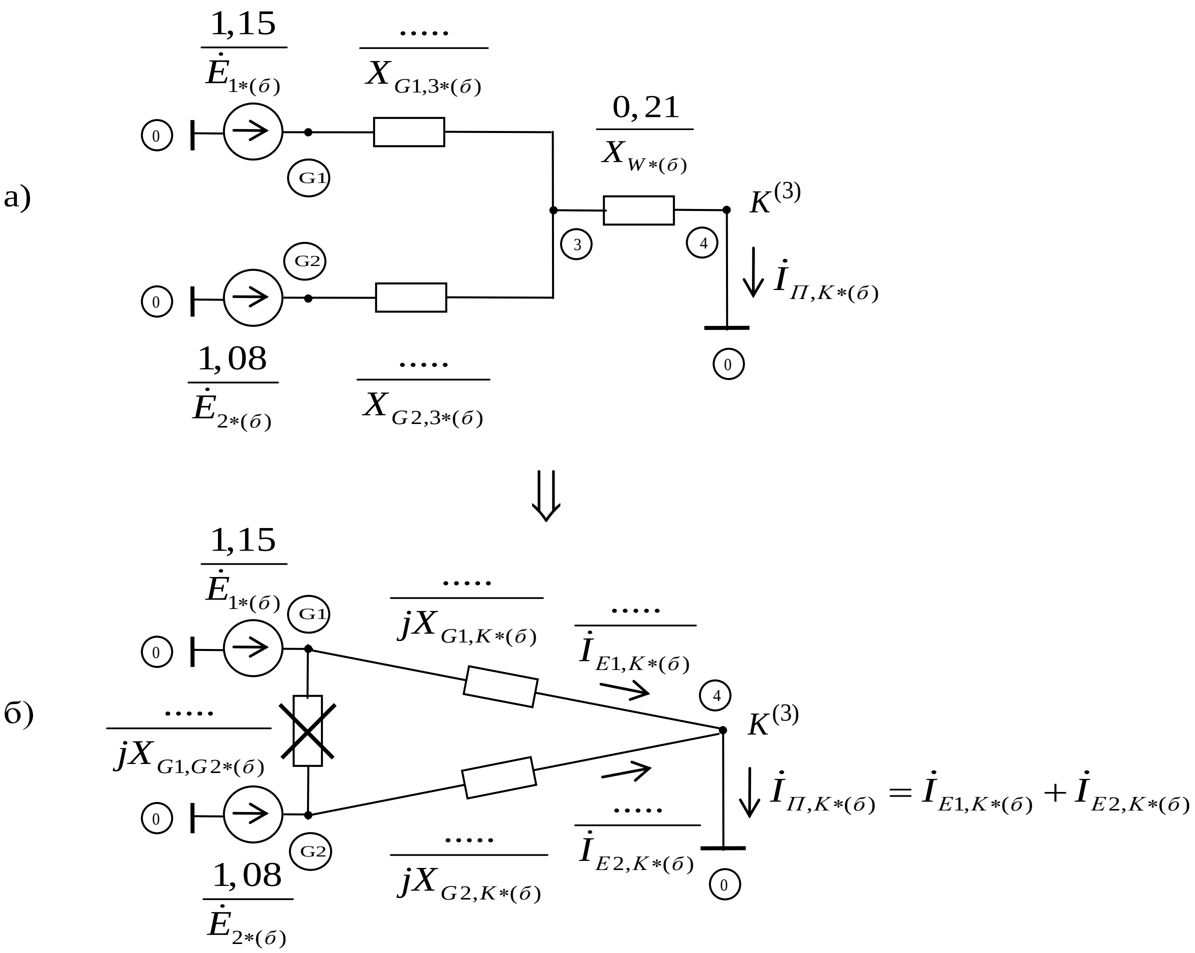
проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg

алните източници на напрежение. (Затова на схемата от фиг.11б) съпротивлението $jX_{G1,G2*(б)}$ е показано зачертано). Неотчитането на тези съпротивления преобразува окончателната схема в схема с паралелно включени реални източници на напрежения във възлите с к.с., както това е показано на фиг.В.12., в такава, че източниците на напрежение са представени в **лъчева схема** спрямо възела на к.с., за разлика от схемата на фиг.В.10б), която се нарича **обобщена схема**, защото всичките източници са представени с един източник.

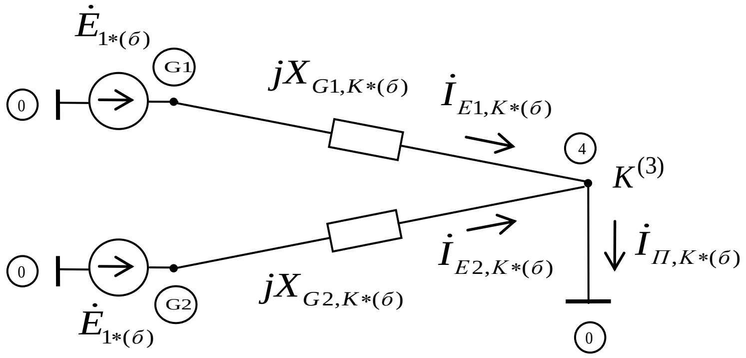


Фиг.В.10. Ред на еквивалентно преобразуване на е.з.с до обобщена (едноконтурна) схема спрямо мястото на к.с.

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg



Фиг.В.11. Ред на еквивалентно преобразуване на е.з.с. до двулъчева спрямо мястото на к.с.



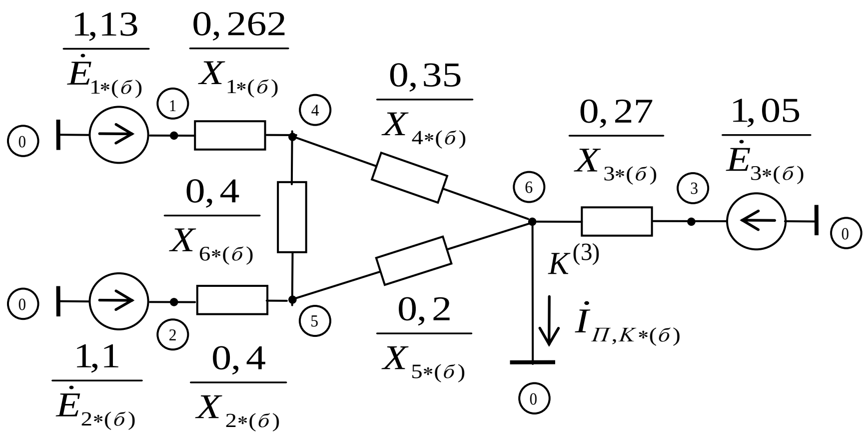
фиг.В.12. Лъчева схема спрямо мястото на к.с.

Задача 2.3: На фиг.В.13 е показана еквивалентна схема във възел 5, на която е моделирано метално трифазно к.с. Еквивалентно да се преобразува схемата до:

1) обобщена (едноконтурна) схема спрямо мястото на к.с.;

2) лъчева схема спрямо мястото на к.с.

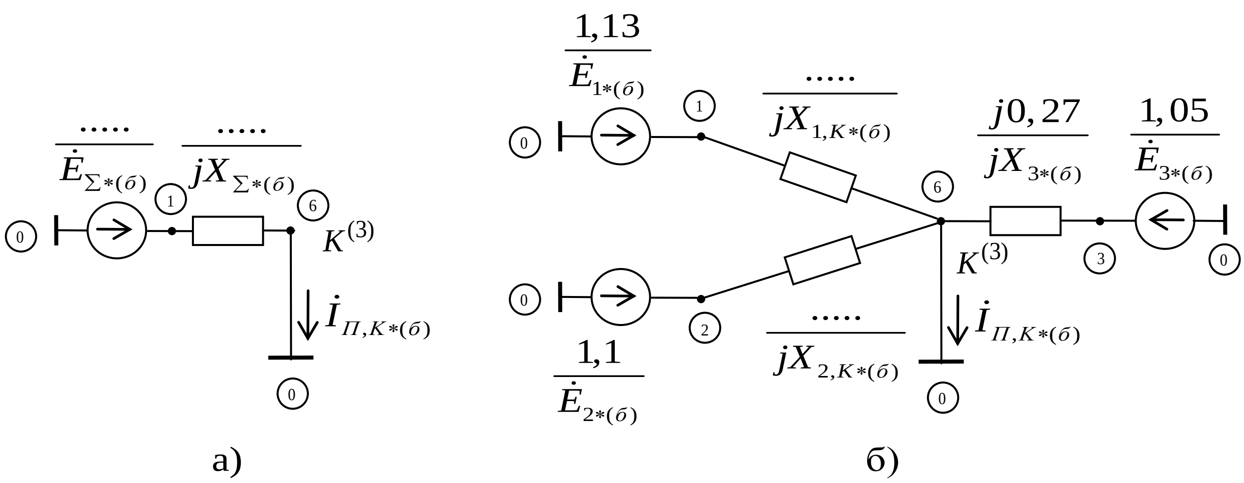
проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg



Фиг.В.13.

Методични указания.

Изходната схема от фиг.В.13 трябва да се преобразува до схемите от фиг.В.14. Използват се преобразуванията триъгълник–звезда и обратно, паралелни източници в един.



Фиг.В.14. Еквивалентно преобразувани схеми спрямо мястото на к.с.:
а) обобщена (едноконтурна) схема; б) лъчева схема