



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
катедра „Електронергетика“

№2. Координатни системи, прилагани за формиране на математичното описание на ЕЕС

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов

Видове

- Фазни координати **A,B,C**
- Симетрични координати **1,2,0** (координатна с-ма на Фортескю)
- **$\alpha,\beta,0$** координати (координатна с-ма на Кларк)
- **$d,q,0$** координати (координатна система на Парк)

2



Векторно-матрично представяне

- Векторно представяне

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix};$$

- Линейно преобразуване (трансформиране) на координати:

– права трансформация

$$\mathbf{i}' = \mathbf{T}_I \cdot \mathbf{i}; \quad \mathbf{u}' = \mathbf{T}_U \cdot \mathbf{u}; \quad \mathbf{I}' = \mathbf{T}_I \cdot \mathbf{I}; \quad \mathbf{U}' = \mathbf{T}_U \cdot \mathbf{U};$$

– обратна трансформация

$$\mathbf{i} = \mathbf{T}_I^{-1} \cdot \mathbf{i}'; \quad \mathbf{u} = \mathbf{T}_U^{-1} \cdot \mathbf{u}'; \quad \mathbf{I} = \mathbf{T}_I^{-1} \cdot \mathbf{I}'; \quad \mathbf{U} = \mathbf{T}_U^{-1} \cdot \mathbf{U}';$$

3

Симетрични координати **1,2,0**

- Трансформационни матрици: $\mathbf{T}_I = \mathbf{T}_U = \mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \text{където } a = 1 \cdot e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Трансформация на режимните параметри:

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}; \quad \mathbf{U}_s = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{I}_s; \quad \mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{U}_s$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_0 \end{bmatrix}$$

- Трансформация на схемните параметри:

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}^{-1}; \quad \mathbf{Y}_s = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{S}^{-1}; \quad \mathbf{Z} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_s \cdot \mathbf{S}; \quad \mathbf{Y} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_s \cdot \mathbf{S}$$

4



Симетрични координати **1,2,0**

• Предимства:

- не променя структурата на математичното описание и мерните единици: $\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{U}_S = \mathbf{Z}_S \cdot \mathbf{I}_S$
- за системи със схемна симетрия матричните коефициенти в математичното описание са диагонални:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{AA} & \dot{Z}_{AB} & \dot{Z}_{AC} \\ \dot{Z}_{BA} & \dot{Z}_{BB} & \dot{Z}_{BC} \\ \dot{Z}_{CA} & \dot{Z}_{CB} & \dot{Z}_{CC} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{S трансформация}} \mathbf{z}_S = \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{cases} \dot{Z}_1 = \\ \dot{Z}_0 = \end{cases}$$



5

Симетрични координати **1,2,0**

• Недостатъци:

- в трансформационната матрица \mathbf{S} има комплексни числа, което създава изчислителни проблеми при работа с моментни стойности;
- неприложимост за елементи с променящи се във времето схемни параметри и **несинусоидални режими**;
- неинвариантност по отношение на израза за пълната мощност:

$$\dot{S} = \mathbf{U}^T \cdot \hat{\mathbf{I}} \neq \mathbf{U}_S^T \cdot \hat{\mathbf{I}}_S = \frac{1}{3} \cdot \dot{S}$$

Мощността, изчислена с фазни координати: $\dot{S} =$

Мощността, изчислена със симетрични координати: $\dot{S} =$

6



Симетрични координати 1,2,0

- Приложение: анализ на несиметрични **синусоидални** режими (най-често установени) в системи със схемна симетрия

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_0$$

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{обратна трансформация}} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ a^2 \cdot I_1 \\ a \cdot I_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_2 \\ a \cdot I_2 \\ a^2 \cdot I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_0 \\ I_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{A,1} \\ I_{B,1} \\ I_{C,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{A,2} \\ I_{B,2} \\ I_{C,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{A,0} \\ I_{B,0} \\ I_{C,0} \end{bmatrix}$$

7

$\alpha, \beta, 0$ координати

- Трансформационни матрици: $\mathbf{T}_I = \mathbf{T}_U = \mathbf{K}$ фаза A $\gamma + t$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

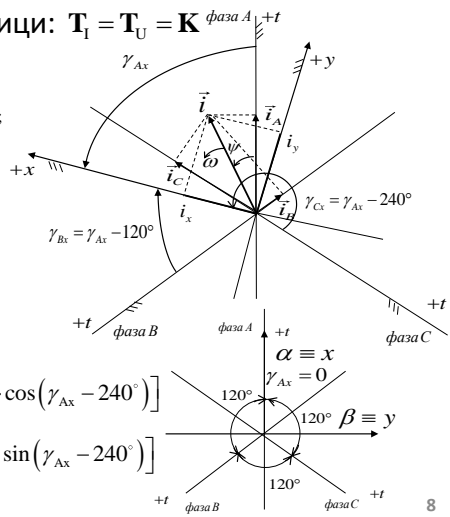
- Съставяне на \mathbf{K} :

$$i_0 = \frac{1}{3} \cdot (i_A + i_B + i_C)$$

$$\vec{i} = \frac{2}{3} (\vec{i}_A + \vec{i}_B + \vec{i}_C) = i^{\psi}$$

$$i_x = \frac{2}{3} [i_A \cdot \cos \gamma_{Ax} + i_B \cdot \cos(\gamma_{Ax} - 120^\circ) + i_C \cdot \cos(\gamma_{Ax} - 240^\circ)]$$

$$i_y = \frac{2}{3} [i_A \cdot \sin \gamma_{Ax} + i_B \cdot \sin(\gamma_{Ax} - 120^\circ) + i_C \cdot \sin(\gamma_{Ax} - 240^\circ)]$$



8



$\alpha, \beta, 0$ координати

- Трансформация на режимните параметри:

– моментни стойности

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{i}; \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{i}_k; \quad \mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{i}_k = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

– ефективни стойности

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{I}; \quad \mathbf{U}_k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{I}_k; \quad \mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}_k$$

$$\mathbf{I}_k = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

- Трансформация на схемните параметри:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{K}^{-1}; \quad \mathbf{Y}_k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{K}^{-1} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{K}; \quad \mathbf{Y} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_k \cdot \mathbf{K}$$

– за елементи с фазна схемна симетрия

$$\mathbf{Z}_\alpha =$$

$$; \quad \mathbf{Z}_0 =$$

9

$\alpha, \beta, 0$ координати

- Предимства:

– не променя структурата на математичното описание и мерните единици: $\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{U}_k = \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{I}_k$

– за системи със схемна симетрия матричните коефициенти в математичното описание са диагонални:

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \dot{Z}_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_0 \end{bmatrix}$$

– коефициентите в трансформационната матрица \mathbf{K} са реални числа, което прави координатната система $\alpha, \beta, 0$ лесно приложима и за моментни стойности;

– **приложима за несинусоидални режими.**

10



$\alpha, \beta, 0$ координати

- Недостатъци:

- неинвариантност по отношение на израза за пълната мощност:

$$\dot{S} =$$

- неприложимост за елементи с променящи се във времето схемни параметри (въртящи се машини);

- Приложение: за анализ на преходни (в моментни стойности) и установени (в ефективни стойности) режими в системи с фазна схемна симетрия.

11

$d, q, 0$ координати

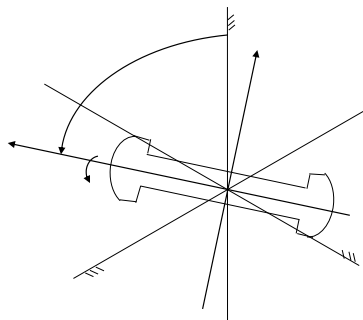
- Трансформационни матрици: $T_I = T_U = \Pi$

$$\gamma_{\Lambda, d} = \int_0^t \omega \cdot dt + \gamma_0$$

при $\omega = \omega_0 = \text{const}$ $\gamma_{\Lambda, d} = \omega_0 \cdot t + \gamma_0 = \gamma(t)$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\Pi^{-1} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$



12



d,q,0 координати

- Трансформация на режимните параметри:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{II} &= \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{i}; & \mathbf{u}_{II} &= \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}; & \boldsymbol{\psi}_{II} &= \mathbf{\Pi} \cdot \boldsymbol{\psi} \\ \mathbf{i} &= \mathbf{\Pi}^{-1} \cdot \mathbf{i}_{II}; & \mathbf{u} &= \mathbf{\Pi}^{-1} \cdot \mathbf{u}_{II}; & \boldsymbol{\psi} &= \mathbf{\Pi}^{-1} \cdot \boldsymbol{\psi}_{II} \\ \mathbf{i}_{II} &= \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix}; \mathbf{u}_{II} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \end{bmatrix}; & \mathbf{i} &= \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}; \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\psi}_{II} &= \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

– Преобразуването d,q,0 е неунитарно и моментната мощност се изразява с израза:

$$p =$$

13

d,q,0 координати

- Трансформация на схемните параметри:

$$\mathbf{L}_{II} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{\Pi}^{-1} \quad \mathbf{R}_{II} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Pi}^{-1}$$

Особеното на \mathbf{L}_{II} е, че нейните елементи са константи, за разлика от \mathbf{L} , която при синхронните машини е с периодично променящи се коефициенти.

- За елемент със схемна симетрия:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & R_M & R_M \\ R_M & R & R_M \\ R_M & R_M & R \end{bmatrix}; & \text{където} \\ & & L_d = L_q = L - M = L_1; \\ & & L_0 = \\ \mathbf{L}_{II} &= \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{II} = \begin{bmatrix} R_d & 0 & 0 \\ 0 & R_q & 0 \\ 0 & 0 & R_0 \end{bmatrix}; & R_d = R_q = R - R_M = R_1; \\ & & R_0 = \end{aligned}$$

14



d,q,0 координати

- Промяна на структурата на диференциалните уравнения

$$\mathbf{u} = \mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_{II} =$$

П трансформация

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Изобразяване на **dq** в комплексната равнина
(за уравновесена симетрична трифазна система с постоянна честота, равна на честотата на въртене на dq координтни оси)

$$\begin{cases} i_d = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \gamma_0 = const \\ i_q = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin \gamma_0 = const \\ i_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{i}_d = \frac{i_d}{\sqrt{2}} \\ \dot{i}_q = \frac{i_q}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

15

d,q,0 координати

- Предимства

- преобразува уравненията с променливи коефициенти в такива с постоянни;
- преобразува синусоидално изменящи се величини в постоянни (при честота на системата равна на честотата на въртене на dq координтни оси);
- приложима за моментни стойности на режимните параметри, изменящи се несинусоидално;

- Недостатъци

- променя структурата на диференциалните уравнения;
- трансформационната матрица е с променливи коефициенти;
- неинвариантност по отношение на израза на мощността;

Приложение: за анализ на режими на ЕЕС с отчитане на процесите във въртящите се машини.

16