проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg

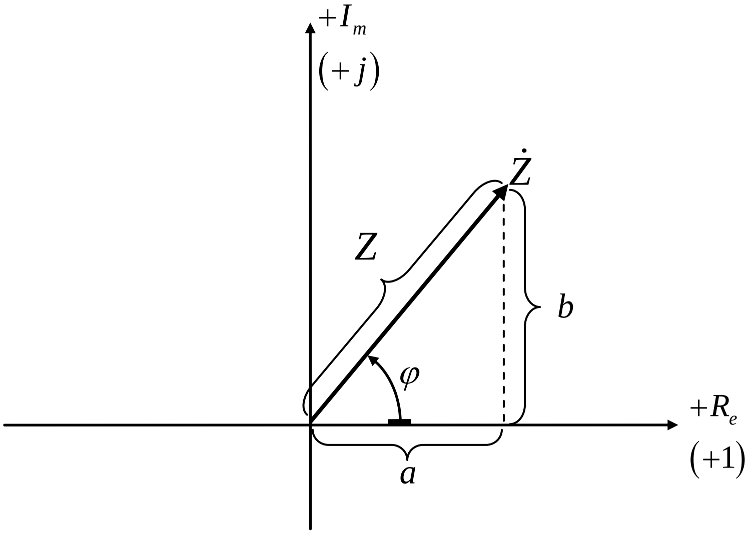
Въводно упражнение

ТЕМА: *ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ ЗА КОМПЛЕКСНИТЕ ЧИСЛА.*

☐ В.1. Основни понятия за комплексните числа.

☐ В.1.1. Представяне на комплексните числа в алгебрична и експоненциална форма.

Комплексното число $\dot{Z}$ се дефинира математично чрез израза $\dot{Z} = a + jb$, където a е реалната част на комплексното число ; b – имагенерната част на комплексното число; $j = \sqrt{-1}$. Тази форма на записване на комплексното число се нарича **алгебрична**. Значението на комплексното число се изяснява чрез геометричното му изразяване в комплексната (Гаусовата) равнина (R_e, I_m), както е показано на фиг.В.1.1.



Фиг.В.1.1. Представяне на комплексно число чрез правоъгълни (a,b) и полярни (Z,φ) координати

От фиг.В.1.1. е видно, че $\left| \begin{array}{l} a = Z \cdot \cos\varphi \\ b = Z \cdot \sin\varphi \end{array} \right.$

Тогава : $\dot{Z} = a + jb = Z \cdot \cos\varphi + jZ \cdot \sin\varphi = Z \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)$

По формулата на Ойлер :

$$Z \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) = Z \cdot e^{j\varphi} ,$$

следователно $\dot{Z} = a + jb = Z \cdot e^{j\varphi}$.

Записването на комплексното число в полярни координати $Z \cdot e^{j\varphi}$ се нарича **експоненциална** форма, а Z се нарича модул и φ – аргумент (ъгъл).

За да се избегне писането на експоненциалната функция $e^{j\varphi}$, в литературата по енергетика е възприета следната опростена форма:

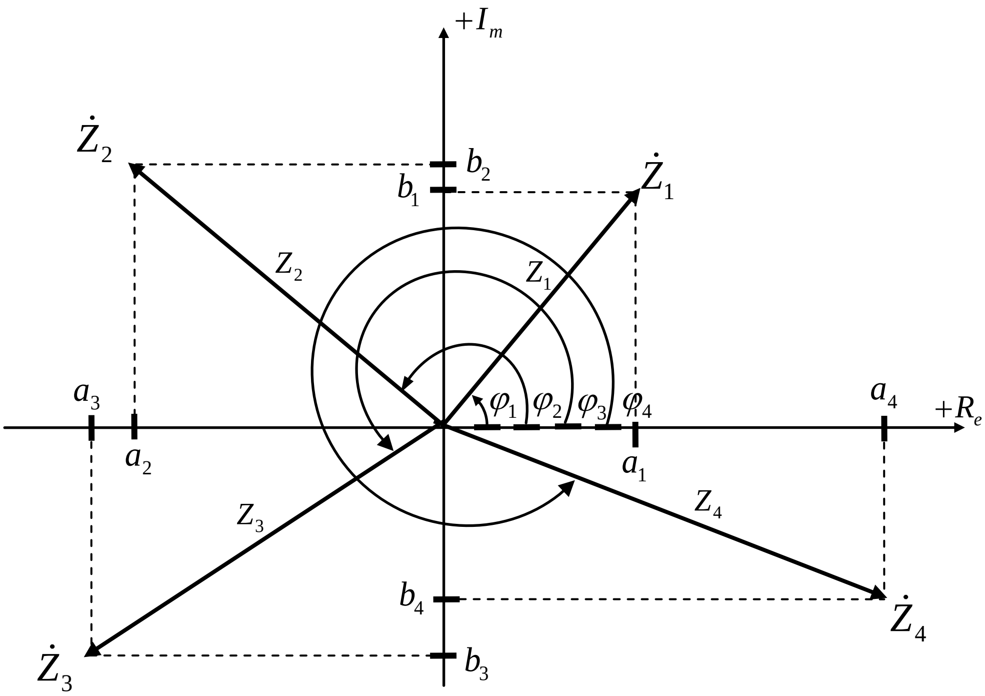
проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg

$$\dot{Z} = Z\underline{|\varphi}, \text{ където } \underline{|\varphi} = e^{j\varphi}.$$

За превръщането на комплексното число от едната форма на записване към другата форма , се използват изразите (вж.фиг.В.1.1.)

(В.1.1.)
$$\left| \begin{array}{l} Z = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = arctg\dfrac{b}{a} \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} a = Z \cdot \cos\varphi \\ b = Z \cdot \sin\varphi \end{array} \right. .$$

Забележка: При използване на (В.1.1.) трябва да се съобразява в кой квадрант е комплексното число (вж. фиг.В.1.2.). Затова е по-добре да се работи с изчислително средство, пригодено за работа с комплексни числа.



Фиг.В.1.2. Измерване на ъгъла φ (аргумент) на комплексни числа от четирите квадранта на комплексна равнина

☐ В.1.2. Действия с комплексни числа

При смятане с комплексни числа без специализирани средства трябва да се има в предвид следното:

Събирането и изваждането на комплексни числа е по-лесно, ако числата са в алгебрична форма на записване. Събират се (изваждат се) поотделно реалните и имагинерните им части.

Например, събиране на две комплексни числа $\dot{Z}_1$ и $\dot{Z}_2$ се извършва чрез израза:

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2),$$

а изваждането:

$$\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2).$$

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов
e-mail: k.gerasimov@tu-varna.bg

Умножаването на комплексни числа се извършва най-удобно, когато числата са в експоненциална форма. Умножават се модулите и се събират ъглите, т.е. $\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 = \dot{Z}_1^{\underline{|\varphi_1}} \cdot \dot{Z}_2^{\underline{|\varphi_2}} = Z_1 \cdot Z_2^{\underline{|\varphi_1+\varphi_2}}$.

Делението се извършва чрез разделяне на модулите и изваждане на ъглите, т.е. $\dfrac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \dfrac{\dot{Z}_1^{\underline{|\varphi_1}}}{\dot{Z}_1^{\underline{|\varphi_2}}} = \dfrac{Z_1}{Z_2}^{\underline{|\varphi_1-\varphi_2}}$.

Умножението и делението при алгебрична форма на записване на числата се извършва чрез израза:

$$\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 = \left(a_1 + jb_1\right)\cdot\left(a_2 + jb_2\right) = \left(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2\right) + j\left(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1\right)$$

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{\left(a_1 + jb_1\right)\cdot\left(a_2 - jb_2\right)}{\left(a_2 + jb_2\right)\cdot\left(a_2 - jb_2\right)} = \frac{\left(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2\right) + j\left(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2\right)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Задача 1: Да се извършат действия с комплексните числа, както следва:

а) $\dot{Z}_a = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 - \dot{Z}_4$, където $\dot{Z}_1 = 2 + j4$; $\dot{Z}_2 = j8$; $\dot{Z}_3 = 5^{\underline{|90^0}}$; $\dot{Z}_4 = 3$

б) $\dot{Z}_б = \dot{Z}_5 \cdot \dot{Z}_6$, където $\dot{Z}_5 = 8 - j3$; $\dot{Z}_6 = 4^{\underline{|120^0}}$;

в) $\dot{Z}_в = \left(\dot{Z}_5 \cdot \dfrac{\dot{Z}_6}{\dot{Z}_1}\right)\cdot\left(\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_4\right)$

Резултатите да се представят в алгебрична и комплексна форма на записване на комплексните числа.

Изходните числа и резултатите от действията с тях да се представят графично в комплексната равнина.