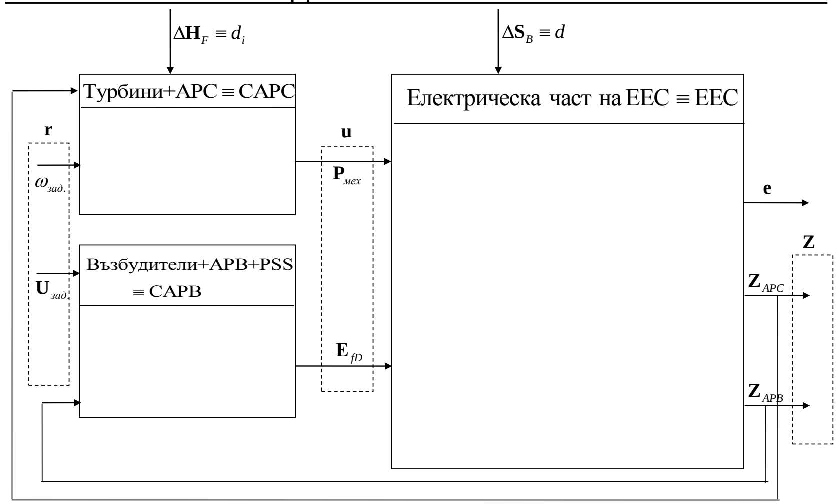
ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
катедра „Електронергетика“

№5. Уравнение на смутеното движение и определение за устойчивост по Ляпунов. Необходимо и достатъчно условие за устойчивост на линейна система.

проф. д.т.н. инж. мат. К. Герасимов

Структура на математичното описание за анализ на устойчивостта на механичното движение на ЕЕС



Математично описание на електромеханичното описание на ЕЕС

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)$$

където:

t

$\mathbf{X} = [X_1, X_2, ..., X_n]^T$

$\mathbf{U} = [\mathbf{r}, \mathbf{d}]^T$

$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \left[\frac{dX_1}{dt}, \frac{dX_2}{dt}, ..., \frac{dX_n}{dt}\right]^T$;

$\mathbf{F} = [f_1(\mathbf{X}, t), f_2(\mathbf{X}, t), ..., f_n(\mathbf{X}, t)]^T$.

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$$

3 / 9

Уравнение на смутеното движение

$\mathring{\mathbf{X}}(t)$ $\qquad$ $\tilde{\mathbf{X}}(t)$

$Y_i(t)$

$$Y_i(t) = \tilde{X}_i(t) - \mathring{X}_i(t) \quad \rightarrow \quad \tilde{X}_i(t) = \mathring{X}_i(t) + Y_i(t)$$

$$\frac{d\left(\mathring{X}_i + Y_i\right)}{dt} = f_i\left(Y_1 + \mathring{X}_1, Y_2 + \mathring{X}_2, ..., Y_n + \mathring{X}_n\right) \quad \rightarrow$$

$$\frac{dY_i}{dt} = f_i\left(Y_1 + \mathring{X}_1, Y_2 + \mathring{X}_2, ..., Y_n + \mathring{X}_n\right) - \frac{d\mathring{X}_i}{dt} =$$

$$= f_i\left(Y_1 + \mathring{X}_1, Y_2 + \mathring{X}_2, ..., Y_n + \mathring{X}_n\right) - f_i\left(\mathring{X}_1, \mathring{X}_2, ...\mathring{X}_n\right)$$

$\mathring{X}_i = \mathring{X}_i(t)$

$\frac{d\,\mathbf{Y}}{dt} = \boldsymbol{\varphi}_i(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$

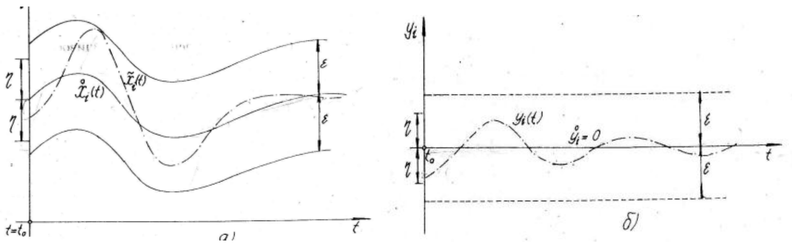
$\mathbf{Y} \equiv 0$

4 / 9

Определение за устойчивост по Ляпунов

Несмутеното движение на системата е устойчиво по Ляпунов, ако за произволно малко положително число $\varepsilon > 0$ съществува друго малко положително число $\eta = \eta(\varepsilon)$, така че при всички смутени начални условия, които удовлетворяват неравенствата

за $t > t_0$ са изпълнени условията:



5 / 9

Уравнения с малки отклонения (вариации) от установен режим

$$Y_i\left(t\right) = \tilde{X}_i\left(t\right) - \mathring{X}_i\left(t\right)$$

$$\Delta X_i\left(t\right) = \tilde{X}_i\left(t\right) - X_{i,0}$$

$$\frac{d\left(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}\right)}{dt} = \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}\right) + \mathbf{B}\cdot\left(\mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}\right)$$ – линейна система уравнения с малки отклонения

$$\frac{d\Delta\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{X}$$

6 / 9

Линеаризиране по първо приближение

$$\frac{dX}{dt} = f(X); \quad X = X_0 + \Delta X \qquad \frac{d(X_0+\Delta X)}{dt} = f(X+\Delta X)$$

$$\frac{d(X_0+\Delta X)}{dt} = \frac{dX_0}{dt} + \frac{d\Delta X}{dt} = f(X_0) + \frac{d\Delta X}{dt}$$

$$f(X+\Delta X) = f(X_0) + \frac{\partial f}{\partial X}(X = X_0)\cdot\Delta X + \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X=X_0)\cdot\Delta X^2 + \ldots\ldots$$

$$\frac{d\Delta X}{dt} = \frac{\partial f}{\partial X}(X=X_0)\cdot\Delta X$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}); \ \mathbf{X} = [X_1 \ldots\ldots X_n]^T$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}) \ldots\ldots f_n(\mathbf{X})]^T$$

$$\frac{d\Delta\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{J}\cdot\Delta\mathbf{X}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} & , & , & ,\ldots\ldots \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ & & ,\ldots\ldots & \end{bmatrix}_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}$$

7 / 9

Решение на линеаризираната система уравнения

$$\frac{d\Delta\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{J}\cdot\Delta\mathbf{X} \qquad (\mathbf{J} - \mathbf{1}p)\cdot\Delta\mathbf{X} = 0$$

$$\mathbf{D}(p) = (\mathbf{J} - \mathbf{1}p) = \begin{vmatrix} (j_{11}-p) & j_{12} & \ldots\ldots & j_{1n} \\ j_{21} & (j_{22}-p) & \ldots\ldots & j_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ j_{n1} & j_{n2} & \ldots\ldots & (j_{nn}-p) \end{vmatrix}$$

$$H(p) = \det\mathbf{D}(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}p + a_n = 0$$

$$\Delta X_i(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t}; \quad i = \overline{1,n}$$

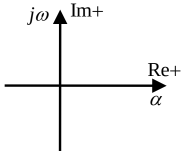
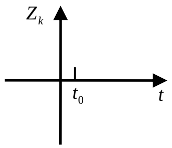
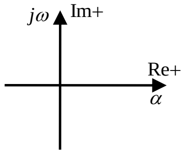
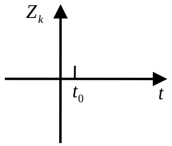
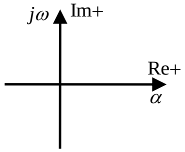
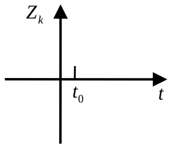
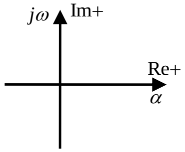
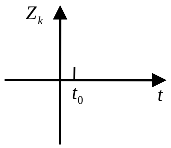
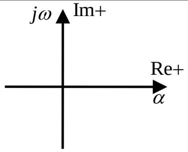
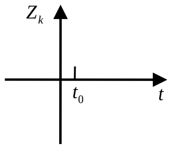
при реален корен $p_k = \alpha_k \quad \rightarrow$

при комплексен корен $p_k = a_k \pm j\omega_k \quad \rightarrow$

при *l*-кратен корен:

8 / 9

Необходимо и достатъчно условие за устойчивост на линейна система

	Корени		Разположение на корените	Вид модални движения	
	α_k	$j\omega_k$		$Z_k=f(t)$	Описание
а	+	0			
б	+	±			
в	-	0			
г	-	±			
д	0	0			
е	0	±